TOP 06

POLYNÔME CARACTÉRISTIQUE DES MATRICES CARRÉES DE TAILLE 3.

Les fichiers TOP sont réservées aux étudiants qui préparent le Top 5. Ils sont plus difficiles et demandent déjà une bonne maîtrise du reste du programme (cours, exercices, TD et méthodes). Même si le contenu de ces exercices dépasse le cadre du programme de ECG2, ils peuvent inspirer une série de questions d'un texte de concours.

Cet exercice concerne le chapitre 06 (réduction).

Exercice 1.-
Motivation. Dans l'étude d'une matrice donnée A, il est souvent intéressant de disposer d'un polynôme annulateur de A. En effet, cela renseigne sur les valeurs propres de A. On rappelle que les valeurs propres sont contenues dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur. Cette méthode de recherche des valeurs propres possède néanmoins une faille importante : rien ne nous dit que les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme annulateur. Imaginons par exemple que l'on sache que le polynôme

$$P(x) = (x-1)^2(x-3)$$

soit un polynôme annulateur de A. Alors le polynôme

$$Q(x) = (x-1)^2(x-3)(x+1)$$

est encore un polynôme annulateur de A. On peut donc toujours "ajouter des racines" à un polynôme annulateur et ces racines ne sont pas des valeurs propres de A.

Dans cet exercice, on présente une théorie qui permet de trouver un polynôme annulateur d'une matrice de taille 3×3 dont les racines sont **exactement** les valeurs propres de la matrice. Ce polynôme n'a donc aucune racine "en trop" comme dans le polynôme Q précédent. Même si l'existence et les propriétés de ce polynôme ne sont pas supposées être connues des candidats, il est très fréquent que les sujets de concours nous guident pour le retrouver. C'est le cas par exemple dans les sujets récents de **ECRICOME** 2021 Exercice 1 et 2019 Exercice 1, **EDHEC** 2021 Exercice 3, **EML** 2019 Exercice 2 ou encore **HEC** 2018.

Au passage, nous rencontrerons la notion de **déterminant** d'une matrice de taille 3×3 : c'est un outil qui sert à décider si une matrice est inversible. En dimension 2, on rappelle qu'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et le nombre $ad - bc$ s'appelle le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. C'est ce résultat que nous généralisons à la dimension 3.

Première partie : déterminant en dimension 3.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On appelle **déterminant** de cette matrice et on note $\det(A)$ le nombre

$$\det(A) = aei + dhc + gbf - ahf - dbi - gec \text{ [1]}$$

Parfois, il est commode de voir le déterminant comme une fonction de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ des trois vecteurs colonne de $\mathbb{R}^3$ formant la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il prend alors la forme

$$\det(X, Y, Z) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1z_2y_3 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1,$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Propriétés élémentaires du déterminant.

- **a.** Montrer que si deux colonnes de la matrice sont identiques, le déterminant s'annule.
- **b.** Montrer que le déterminant de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vaut 1.
- **c.** Montrer que le déterminant est une application linéaire par rapport à chacune des colonnes. Plus précisément, justifier que si $X, X', X'', Y, Y', Y'', Z, Z', Z'' \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\det(\alpha X' + X'', Y, Z) = \alpha \det(X', Y, Z) + \det(X'', Y, Z)$$
$$\det(X, \alpha Y' + Y'', Z) = \alpha \det(X, Y', Z) + \det(X, Y'', Z)$$
$$\det(X, Y, \alpha Z' + Z'') = \alpha \det(X, Y, Z') + \det(X, Y, Z'')$$

3. En déduire que si la famille (X, Y, Z) est liée dans $\mathbb{R}^3$, alors $\det(X, Y, Z) = 0$.

4. On veut maintenant montrer la réciproque de la question précédente.

- **a.** $(\star)$ [2] Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors

$$\det(A, B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

- **b.** À l'aide de la question précédente et de la question **2.b.**, montrer que si P est une matrice inversible, on a $\det(P) \neq 0$ et

$$\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}.$$

- **c.** Soit maintenant (X, Y, Z) une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$). Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (X, Y, Z). Montrer que $\det(X, Y, Z) = \det(P)$ et conclure.

5. En récapitulant ce qui précède, montrer qu'une matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Deuxième partie : polynôme caractéristique en dimension 3.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On s'intéresse à la fonction

$$P_A : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \det(A - xI_3) \end{array}$$

6. Montrer que P_A est une fonction polynomiale de degré 3.

---

1. Je suis d'accord, ça parait effrayant.
2. On pourra admettre ce résultat pour poursuivre

7. Justifier que les racines de P_A sont **exactement** les valeurs propres de A. On pourra se servir de la question **5.**

8. Poser enfin $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, exprimer $P_A(x) = \det(A - xI_3)$ en fonction des coefficients de A et vérifier que $P_A(A) = 0$.

Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La *recherche* de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

Correction 1.-
Plusieurs de ces questions sont faciles mais très techniques et il faut jouer avec les 9 coordonnées en jeu. J'indique ces questions avec le symbole $\star$ et je ne rédige pas la correction, n'hésitez pas à venir me voir si la rédaction des détails vous pose problème.

1. On trouve 15.

2. **a.** On suppose par exemple que $X = Y$, c'est-à-dire $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$ et $x_3 = y_3$. On a alors

$$\det(X, Y, Z) = x_1x_2z_3 + x_2x_3z_1 + x_3x_1z_2 - x_1x_3z_2 - x_2x_1z_3 - x_3x_2z_1 = 0.$$

Les cas où $X = Z$ ou $Y = Z$ sont similaires.

b. Parmi tous les termes de la forme $x_iy_jz_k$, il n'y en a qu'un qui est non nul (et qui vaut 1), c'est le tout premier $x_1y_2z_3 = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

Noter que le déterminant de la base canonique est aussi le déterminant de la matrice I_3.

c. $\star$.

3. Si la famille est liée, on peut supposer par exemple que $X = \alpha Y + \beta Z$ (les cas où Y ou Z sont combinaisons linéaires des deux vecteurs sont identiques). On a alors

$$\det(X, Y, Z) = \det(\alpha Y + \beta Z, Y, Z) = \alpha \det(Y, Y, Z) + \beta(Z, Y, Z) = 0.$$

En effet, dans les deux derniers déterminants, il y a deux colonnes identiques et le déterminant est donc nul par la question **2.a.**

4. **a.** $\star$.

b. On a si P est inversible, alors d'une part

$$\det(P \cdot P^{-1}) = \det(P)\det(P^{-1})$$

et d'autre part

$$\det(P \cdot P^{-1}) = \det(I_3) = 1.$$

On obtient donc

$$\det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P),}$$

ce qui montre en particulier que $\det(P)$ est non nul.

c. La matrice de passage consiste à exprimer les coordonnées de X, Y et Z dans la base canonique. C'est donc exactement la matrice dont les colonnes sont les vecteurs X, Y et Z. On a donc

$$\det(X, Y, Z) = \det(P).$$

Or P est une matrice de passage, elle est donc inversible (son inverse est la matrice de passage de la base (X, Y, Z) vers la base canonique. Donc $\det(P) \neq 0$ puis $\det(X, Y, Z) \neq 0$.

5. Si A est inversible, son déterminant est non nul d'après la question **4.b.** Inversement, si A n'est pas inversible, alors les colonnes de A forment une famille liée (c'est une famille génératrice de l'image et l'image ne peut pas être de dimension 3 car sinon la matrice serait inversible). On peut donc conclure par la question **3.** que $\det(A) = 0$.

6. On pose $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et on a $P_A(x) = \det\left(\begin{pmatrix} a-x & b & c \\ d & e-x & f \\ g & h & i-x \end{pmatrix}\right)$. Lorsque l'on calcule le déterminant, le premier terme est donc

$$(a-x)(e-x)(i-x)$$

qui est un terme de degrés 3. Tous les autres termes sont de degrés inférieur à 2. On conclut donc que $P_A(x)$ est un polynôme de degrés 3.

7. C'est une reformulation d'un résultat du cours en terme de déterminant. On rappelle que λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible et donc, d'après la question **5.**, si et seulement si $\det(A - \lambda I_3) = 0$ n'est pas inversible. Mais $\det(A - \lambda I_3) = P_A(\lambda)$. Ainsi λ est valeur propre si et seulement si $P_A(\lambda) = 0$.

8. $\star$.